



# Forblad

**Sekundære Spændinger**

**A.J.Moe**

**Tidsskrifter**

**BSM 18-1 Bygningsstatistiske Meddelelser**

**1947**

## SEKUNDÆRE SPÆNDINGER

### DEFINITION OG BETYDNING FOR SIKKERHEDSGRADEN

AF A. J. MOE

*Foredrag holdt i Dansk Selskab for Bygningsstatik d. 30. 9. 1947.*

Hvad forstaar man ved sekundære Spændinger? Svaret er vanskeligt, da man vistnok aldrig har forsøgt en Definition.

Det klassiske Eksempel er sekundære Spændinger i plane Gitterkonstruktioner af Jern. Man taler her om sekundære Spændinger som hidhører fra stive Knudepunktsforbindelser og fra ekscentriske Stangforbindelser, i Modsætning til Grundspændingerne, der bestemmes for friktionsløse Led med centrale Forbindelser. Disse sekundære Spændinger er i Hovedsagen Bøjningsspændinger og Motiveringen for, at man kan se bort fra dem er, at naar de resulterende Spændinger overskrider Proportionalitetsgrænsen og endnu mere naar de kommer op til Flydegrænsen, vil de sekundære Spændinger efterhaanden forsvinde.

Dette klassiske Eksempel er indgaaende behandlet af *Enggesser, A. Ostenfeld, Winkler, Mohr, Grimm* o. m. a.

Der er dog mange andre Eksempler paa Spændinger i Jernkonstruktioner, som man mere eller mindre stiltiende har opfattet som sekundære. Dette gælder de Spændinger, som hidrører fra, at Vinddrageren deltager i Hoveddragernes Nedbøjninger og de Spændinger, som opstaar i Tværafstivningerne ved skæv Belastning o. s. v. Man maa ogsaa opfatte mange Spændinger i Nitteforbindelser som sekundære. Man regner jo Spændingerne jævnt fordelt over Nitterne og over Stangtværnsnittet, men ved direkte Maalinger har *Rühl* f. Eks. fundet, at de maximale Spændinger i en Laske var 2,82 Gange saa stor som Middelspændingen i Laskens mindste Tværnsnit, og her var endda kun anvendt een Nitte.

I andre Tilfælde har man fundet langt større Afgivelser.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Se ogsaa *Cl. Findisen*, Forsch. Geb. Ing.wes. Heft 229 (1920). Heri meddeles Resultater af Maalinger af Spændingerne omkring afdrejede Bolte. *K. Schaechterle* angiver, at de enkelte Nitter kan paavirkes 20—50 % højere end Middeltallet af en Gruppe. Se *Bau-technik* 1928, S. 81. — Meget omhyggelige Maalinger af Spændingerne i Knudeplader om Nitter er udført af *Th. Wyss*. Se Forsch. Geb. Ing.wes. Heft 262 (1923).

De her omtalte sekundære Spændinger optræder i klare Konstruktioner af Jern. I skæve og uklare Jernkonstruktioner, hvis Beregning maa hvile paa yderligere simplificerede Forudsætninger, kan der optræde mangfoldige andre Spændinger, som maa betegnes som sekundære.

Grundspændingerne eller de primære Spændinger er rent hypotetiske og fremkommer udelukkende i Beregninger, hvor man har set bort fra de sekundære Spændinger. I Virkeligheden betyder dette, at man ser bort fra en vis Del af Konstruktionens statiske Ubestemthed.

Da man ved enhver statisk Beregning af et System begynder med at beregne Snitkræfterne i Konstruktionens enkelte Led og specielt ved statisk ubestemte Konstruktioner beregner Snitkræfterne i de statisk ubestemte Led, er det mere logisk at tale om de sekundære Snitkræfter, som man ved Beregninger ser bort fra, end om sekundære Spændinger.

Lokale Spændinger i Nitte- og Svejseforbindelser o. lign., der er uden væsentlig Indflydelse paa Snitkræfterne i Konstruktionens øvrige Led, kan derimod ikke kaldes sekundære Snitkræfter og man kan derfor skelne mellem sekundære Snitkræfter og sekundære Spændinger. I Virkeligheden har man ikke set bort fra saadanne sekundære Spændinger, men kun fra de sekundære Snitkræfter, ved Beregningen af de primære Snitkræfter. At man senere ved Dimensioneringen af de enkelte Led og Forbindelser mere eller mindre ser bort ogsaa fra de sekundære Spændinger er en anden Sag.

Man plejer at slaa sig til Ro med, at Jernets plastiske Egenskaber faar alle sekundære Snitkræfter og sekundære Spændinger til at forsvinde, eller til at blive betydningsløse, før Konstruktionen naar Brudstadiet. Dette kan ikke uden videre siges at være rigtigt.

Holder vi os foreløbig til den klassiske Gitterdrager, er det let at indse, at Ræsonnementet er uholdbart. Ca. Halvdelen af Stængerne er Trykstænger. For disse er Brudspændingen i Almindelighed langt fra Flydegrænsen. Her kan man altsaa ikke være sikker paa, at de sekundære Snitkræfter udlignes i Brudstadiet.

Den Belastningsstilling, som giver størst Spænding i en Gitterstang, vil som Regel ikke give den største Spænding i Konstruktionens øvrige Stænger. Man kan derfor ikke vente, at de sekundære Snitkræfter i Konstruktionens øvrige Stænger forsvinder i Brudøjeblikket.

Ved vekslende Spændinger mellem Træk og Tryk er det langt fra givet, at Konstruktionen taaler de skiftende, blivende Formforandringer med modsat Fortegn, som hidrører fra de sekundære Snitkræfter. Endelig maa man erindre, at de Virkninger, som fremkalder de sekundære Snitkræfter, kan fremkalde meget betydelige dynamiske Paavirkninger

(sekundære dynamiske Snitkræfter), hvor der er Tale om Stødpaavirkninger o. lign.

Vi ser, at det i hvert Fald er af afgørende Betydning at faa at vide, om de sekundære Snitkræfter kan faa Indflydelse paa de primære Snitkræfter (Grundspændingerne), idet man ikke kan gaa ud fra, at alle — eller blot en overvejende Del af de sekundære Snitkræfter i hele Konstruktionen, forsvinder, naar Belastningen er i farligste Stilling for en bestemt Stang.

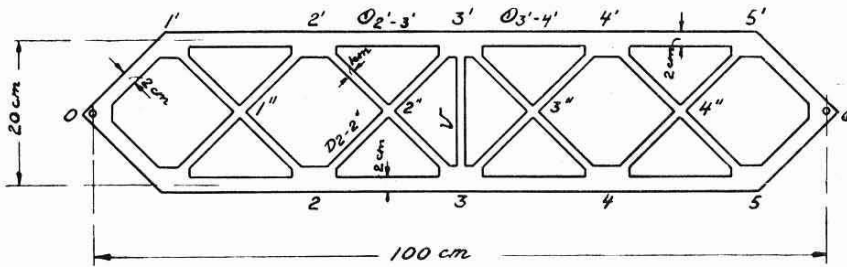


Fig. 1. Celluidmodel.

Dette Forhold er nærmere undersøgt paa en Celluidmodel ved Hjælp af Begg's Apparat.<sup>1)</sup>

Fig. 1 viser Modellen<sup>2)</sup> og Fig. 2—12 viser de direkte maalte Influenslinier for en Del af Stængerne og for de sekundære Snitkræfter (Momen-terne) ved en Del af Knudepunkterne.

Som man ser er Forskellen mellem de teoretiske og de maalte Influenslinier for selve Stangspændingerne ikke ubetydelige. Stort set er Influensarealerne for Flangestængerne lige store ved de maalte og ved de teoretiske Influenslinier ved indirekte Belastning. Dette betyder, som man kunde vente, at de sekundære Snitkræfter praktisk talt er uden Indflydelse paa Flangernes Stangspændinger ved Totalbelastning.

Derimod er Influensarealernes Fordeling over Dragerlængden væsentlig anderledes ved de maalte end ved de teoretiske Influenslinier. En Enkeltkraft i Punkt 2, vil saaledes give ca. 50 % større Trykspænding i Flangestangen  $O_{2-3}$  end den teoretisk skulde give.

For Gitterstængerne er de maalte Influensarealer for Stangspændingerne derimod mindre end de teoretiske. Totalbelastning vil dog give

1) Maalingerne er udført af Forfatteren paa den polytekniske Lærestalts Laboratorium for Bygningsstatik. (1929).

2) I Anledning af en Jernbanebro over Wesel har der været ført en længere Diskussion om de sekundære Snitkræfter i Dragere af denne Form. Se Bautechnik 1927 Heft 55, 1928, Side 67, S. 414 og S. 591 samt Der Stahlbau 1929, S. 183. Maalinger er udført saavel i Schweiz (T. K. V. S. B.) som paa Weselbroen. — Iøvrigt er en nøjagtig Beregning gennemført af P. Christiani: „Beitrag zur Theorie der mehrteiligen Fachwerke“, Aachen 1926.

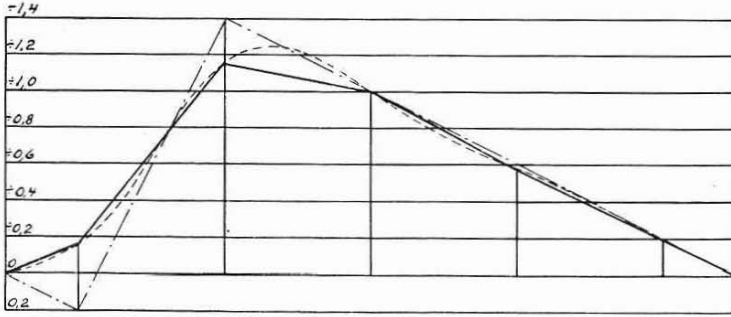


Fig. 2. Influenslinie for  $O_{2-3r}$ . Belastning paa Foden.

— · — · — teoretiske Værdier (primære Spændinger).  
 - - - - - maalte Værdier (direkte Belastning).  
 — — — — — (indirekte — ).

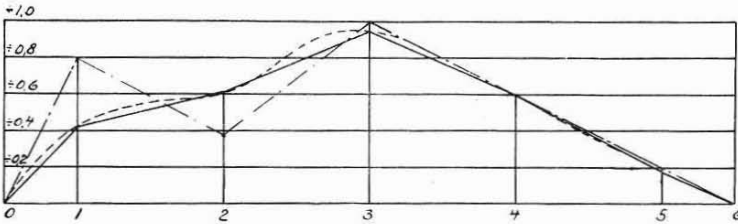


Fig. 3. Influenslinie for  $O_{2-3r}$ . Belastning paa Hovedet.

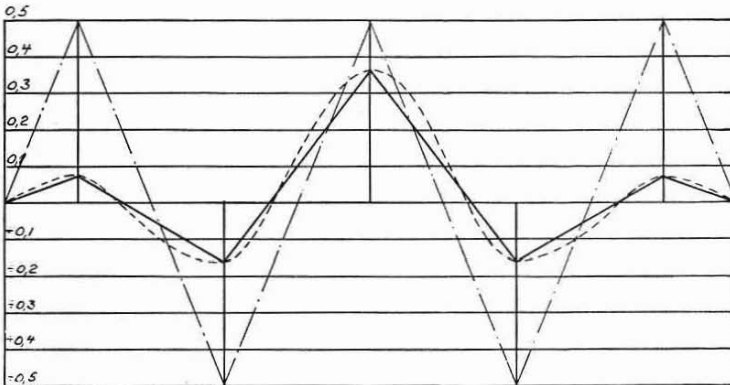


Fig. 4. Influenslinie for Midtervertikalen. Belastning paa Foden.

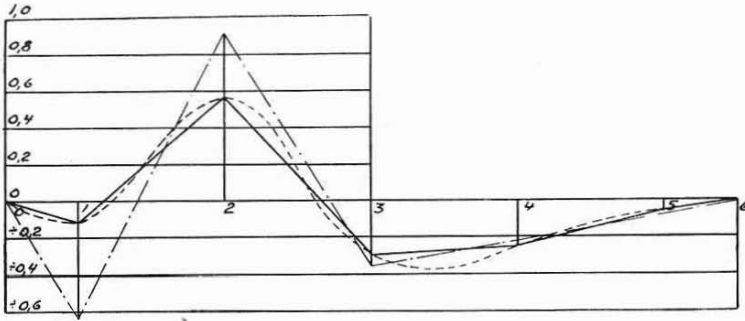
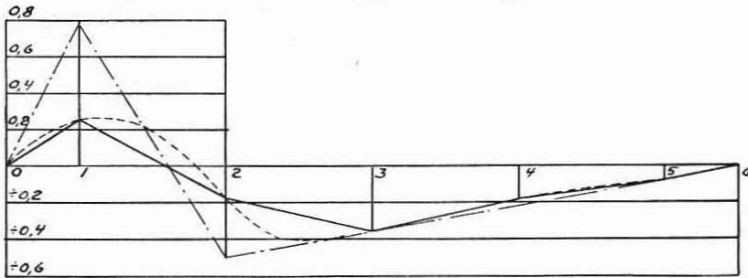
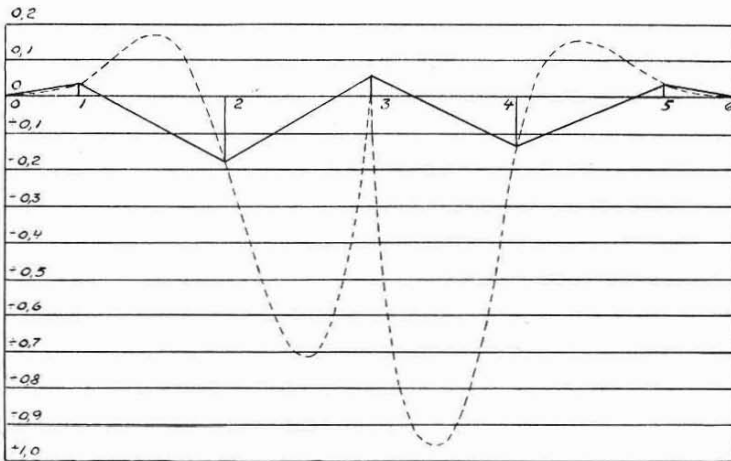
Fig. 5. Influenslinie for  $D_{2-2'}$ . Belastning paa Foden.Fig. 6. Influenslinie for  $D_{2-2'}$ . Belastning paa Hovedet.

Fig. 7. Influenslinie for sekundære Snitkræfter (Moment) i Stang 2-3 umiddelbart ved Punkt 3. Belastning paa Foden.

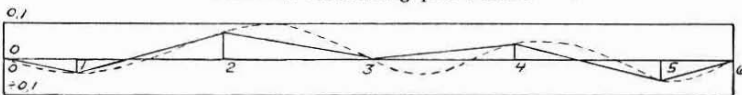


Fig. 8 som Fig. 7, men for Belastning paa Hovedet.

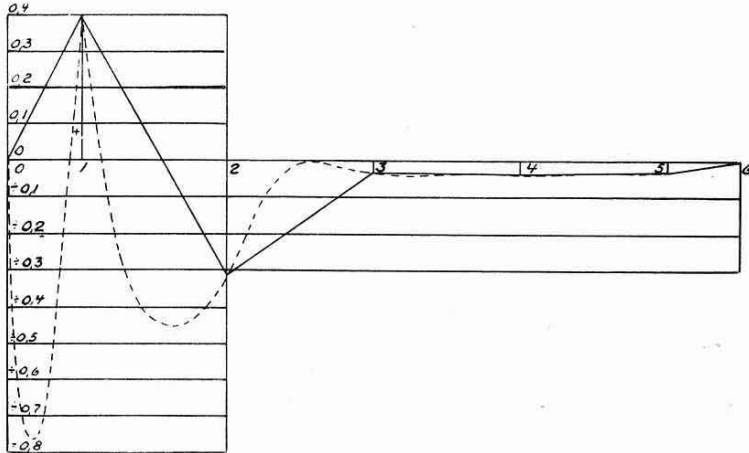


Fig. 9 Influenslinie for sekundære Snitkræfter (Moment) i Stang 1—2 umiddelbart ved Punkt 1. Belastning paa Foden.

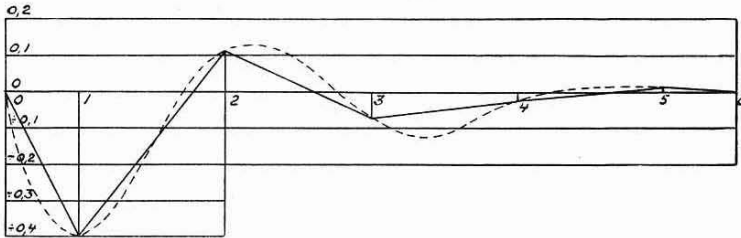


Fig. 10 som Fig. 9, men for Belastning paa Hovedet.

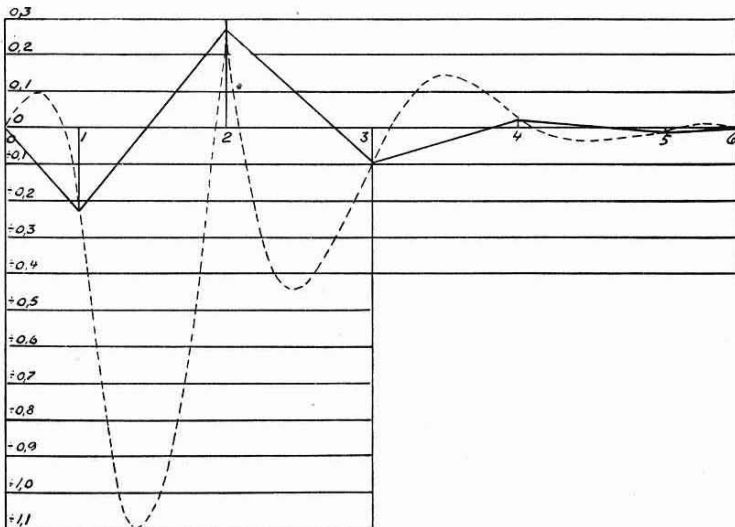


Fig. 11. Influenslinie for sekundære Snitkræfter (Moment) i Stang 2—3 umiddelbart ved Punkt 2. Belastning paa Foden.

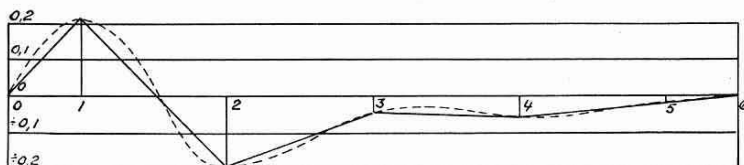


Fig. 12 som Fig. 11, men for Belastning paa Hovedet.

omtrent samme Værdi af Stangspændingerne i den virkelige Konstruktion, som de beregnede primære Stangspændinger (Snitkræfter).

Influenslinierne fra de sekundære Snitkræfter viser alle en Række Strækninger med skiftende Fortegn, som man ogsaa maatte vente. Totalbelastning giver derfor minimale sekundære Snitkræfter. Dette stemmer med at Stangspændingerne fra Totalbelastning i den virkelige Konstruktion stemmer nogenlunde med de beregnede primære Stangspændinger.

Modellen havde 1 m Spændvidde. For en Drager med Spændvidden „1“ Meter skal Ordinaterne multipliceres med „1“.

Hovedresultatet af Maalingerne er, at de sekundære Snitkræfter hidrørende fra stive Knudepunktsforbindelser (alle Stænger var centralt forbundne) kan blive betydelige, og at deres Indflydelse ikke er uvæsentlig paa Stangspændingerne ved bevægelig Belastning.

Alle Maalinger gælder indenfor Proportionalitetsgrænsen.

Teoretiske Undersøgelser<sup>1)</sup> og Maalinger paa Broer<sup>2)</sup> maa ifølge Sagens Natur ligeledes foretages indenfor Proportionalitetsgrænsen. Disse Undersøgelser stemmer stort set overens og viser, at Spændinger fra de sekundære Snitkræfter som Følge af stive Knudepunktsforbindelser ofte udgør 20—30 % af Spændingerne fra de primære Snitkræfter ved særlig gode Konstruktioner og 50 % eller mere ved mindre gode Konstruktioner.

For uregelmæssige og skæve Konstruktioner kan Forholdene blive betydeligt ugunstigere.

Selv om der ikke hidtil har været udformet nogen Definition af sekundære Snitkræfter og Spændinger kan man vel sige, at man herved har forstaaet Snitkræfter og Spændinger, som man kan se bort fra, uden at dette har nogen væsentlig Betydning for Sikkerheden mod Brud.

1) Se navnlig *Patton*: „Beitrag zur Berechnung der Nebenspannungen in Folge starrer Knotenverbindungen“. Zeitschr. f. Arch. u. Ing.wesen 1920, Sp. 417 o. flg.

2) De mest omfattende Maalinger er udført i Schweiz, se T. K. V. S. B. Bericht d. Gruppe V, Juni 1922. Heri har *Ros* ogsaa angivet en ny Tilnærmelsesberegning. Af ældre Maalinger kan nævnes Maalinger udført (1878 og senere) af *Dupuy*. Ann. d. ponts. et ch. 1895, S. 516, *Tourneure* Proc. Am. Soc. Civ. Eng. Nov. 1898, S. 810, og *Fraenkel* (1881) i Tyskland. Siden er der udført mange Maalinger i forskellige Lande. Adskillige af Resultaterne lider dog under, at Maalingerne er udført paa Broer af ældre Typer, ligesom mange af Maalingerne er udført saaledes, at forskellige Bivirkninger gør Resultaterne uklare. En meget fuldstændig Litteraturhenvisning findes i T. K. V. S. B., Ber. d. Gr. V, Zürich 1922, S. 17—22.



Man er herved gaaet ud fra, at Materialerne (Jern) kan taale tilstrækkeligt store blivende Formforandringer, saa Spændingerne kan udlignes (forsvinde) i Nærheden af Brud. Dette gælder ikke uden videre for Søjler. Fig. 13<sup>1)</sup> viser saaledes typiske Arbejdslinier for to nogenlunde centralt paavirkede Søjler og for ekscentrisk paavirkede Søjler af forskellige Tvær-sniitsformer. Den udprægede Spids ved centralt eller kun lidt ekscentrisk paavirkede Søjler forekommer ikke ved mere ekscentrisk paavirkede Søjler, og kun i mindre Grad ved centralt paavirkede, slanke Søjler. Hvis man derfor blot dimensionerer Søjler som noget ekscentrisk paavirkede, vil der kunne forekomme plastiske Formforandringer (eller Afvigelser fra Hooke's Lov), som kan udligne sekundære Snitkræfter og Spændinger. Dette betyder blot, at man erstatter Arbejdsliniens Spids med en vandret Strækning. Denne Antagelse medfører naturligvis, at Beregningen er ukorrekt for det Mellemstadium, hvor Arbejdsliniens Spids optræder, men Beregningerne bliver nøjagtige nok i Brudstadiet. Noget lignende gør man i Virkeligheden, naar man regner med Ostenfeld-Johnson Parablen, fordi denne er fastlagt ved Forsøg med praktiske Søjler, som ikke er virkeligt centralt paavirkede. Ostenfeld-Johnson Parablen angiver netop lavere Værdier, end dem der svarer til helt centralt paavirkede Søjler.

Princippet bør blot føres videre saa alle „centralt paavirkede“, praktiske Søjler dimensioneres for en noget større Ekscentricitet.

Der er næppe Tvivl om, at man — med de sædvanlige Beregningsmaader — uden større Fejl kan se bort fra de sekundære Snitkræfter som hidrører fra stive Knudepunktsforbindelser i Gitterdragere af god Konstruktion. Derimod maa det anses for tvivlsomt, om man uden videre kan se bort fra andre „sekundære“ Snitkræfter og Spændinger i skæve og mindre rationelle Jernkonstruktioner, uden at dette gaar ud over Sikkerhedsgraden. Det skal dog bemærkes, at Trykstængers Udbøjning som Følge af Normalkraften vil faa de sekundære Spændinger til at aftage.

Det maa anses for tvivlsomt, om man kan se bort fra Spændinger fra sekundære Snitkræfter og fra sekundære Spændinger, som er større end Spændingerne fra de primære Snitkræfter. Dette hænger sammen med, at Arbejdslinien for mange Konstruktionsled af Jern ikke kan udvise blivende Formforandringer, der er større end de elastiske, selv om Materialets Brudforlængelse er mange Gange større end de elastiske Formforandringer.

1) Resultater af Forsøg udført 1929 af Forfatteren paa den polytekniske Lærestalts Laboratorium for Bygningsstatik.

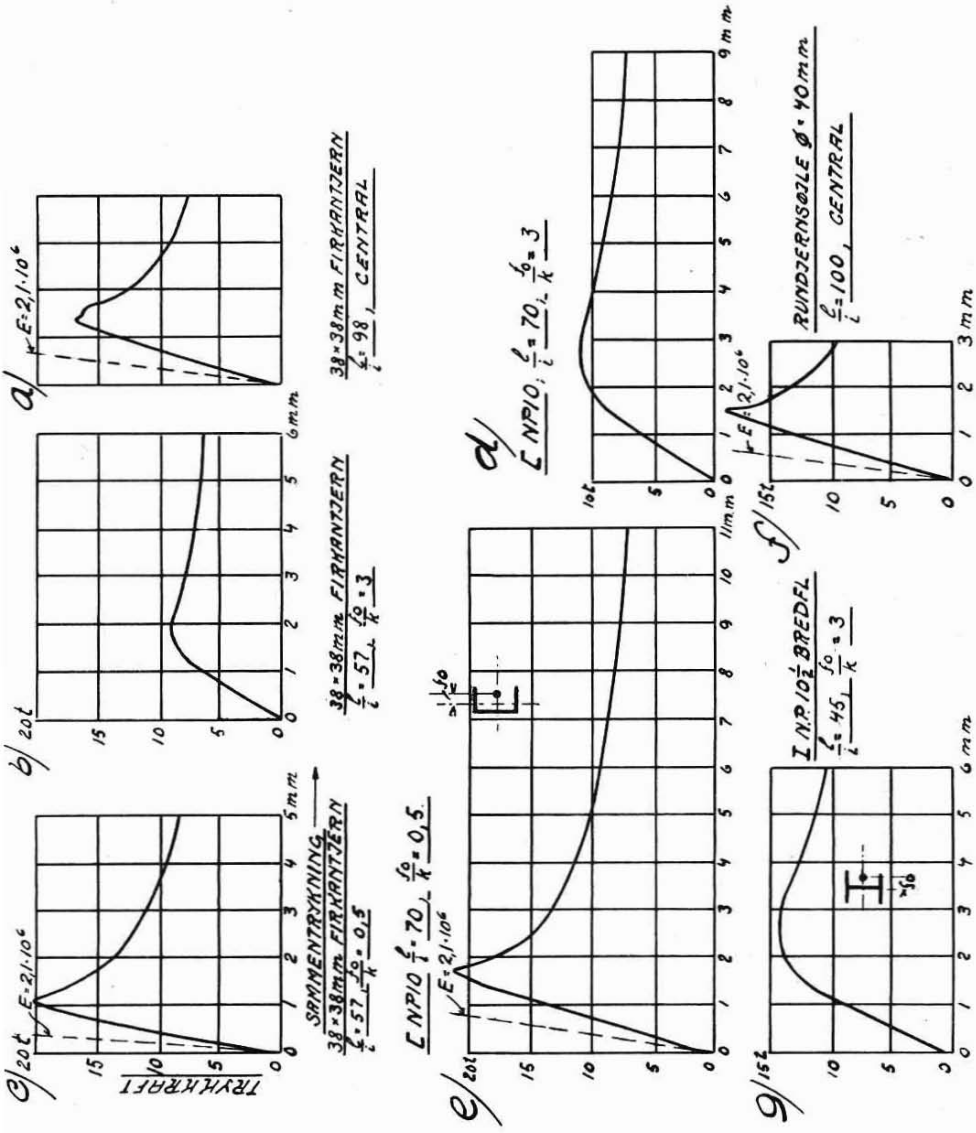


Fig. 13. Søjlearbejdslinier.

For Jernbetonkonstruktioner har man end ikke Eksempler paa, hvad man skal forstaa ved sekundære Snitkræfter og Spændinger.

Gaar man ud fra, at de Snitkræfter og Spændinger, man sædvanligvis ser bort fra, maa kaldes sekundære, kan disse blive meget betydelige. Man behøver blot at tænke paa de Snitkræfter der hidrører fra Bjælkers og Søjlers Vridningsmodstand, Jernbetonens belastningsfordelende Egenskaber, Brobanens Medvirken gennem Søjlerne i en Bues Deformationer, Sidevæggenes Deltagelse i Buens Deformationer ved jordfyldte Buer o. s. v. Stort set er man vel nok paa den sikre Side (overfor Brud) ved at se bort fra saadanne Snitkræfter, men det vil være urimeligt at kalde dem sekundære, da de ofte kan være langt større end de primære. Man er næppe heller altid paa den sikre Side, selv med Hensyn til Sikkerheden mod Brud.

Ogsaa for Jernbeton gælder det, at de enkelte Konstruktionsleds Arbejdslinier højst kan ventes at udvise blivende Formforandringer af samme Størrelse som de elastiske Spændinger.<sup>1)</sup>

Spændinger, der er større end de Spændinger, der hidrører fra de primære Snitkræfter, kan man derfor ikke uden videre kalde sekundære.

---

Man maa under alle Omstændigheder kunne stille visse Krav til Snitkræfter og Spændinger, hvis disse skal kunne kaldes sekundære.

For det første maa man kunne se bort fra dem, uden at dette har nogen væsentlig Indflydelse paa de primære Snitkræfter. Disses teoretiske Værdier maa i hvert Fald ikke blive væsentligt mindre end de virkelige.

For det andet maa det, at man ser bort fra dem, ikke medføre nogen væsentlig Forringelse af Sikkerhedsgraden mod Brud.

For det tredje maa de hidrøre fra statisk Ubestemthed, da de ellers ikke kan udlignes af plastiske Formforandringer.

Man kan herefter opstille følgende Definitioner:

Ved sekundære Snitkræfter forstaaes Snitkræfter, der skyldes statisk Ubestemthed, og som man kan se bort fra, uden at de herefter beregnede primære Snitkræfter afviger afgørende fra Konstruktionens virkelige Snitkræfter og uden at Sikkerheden mod Brud forringes kendeligt.

Ved sekundære Spændinger forstaaes Spændinger, som er uden egentlig Indflydelse paa Konstruktionens Snitkræfter og som man kan se bort fra — ogsaa ved Dimensioneringen — uden at Konstruktionens Sikkerhed mod Brud forringes væsentligt.

<sup>1)</sup> Se f. Eks. Bygningsstatistiske Meddelelser, Aargang XII, Side 163, og Teknisk Ukeblad (Oslo) 1947, Nr. 29.

Ved primære Snitkræfter (primære Spændinger, Grundspændingerne) forstaas de beregnede Snitkræfter som fremkommer, naar man ser bort fra de sekundære Snitkræfter.

Paa samme Maade som man — sidestillet med andre Snitkræfter fremkaldt af statisk Belastning — taler om dynamiske Paavirkninger og Ekstraspændinger (fra Temperaturvariationer, Svind og Eftergiveness af Understøtninger), kan man tale om sekundære dynamiske Virkninger og sekundære Ekstraspændinger.

For Jernbeton-Konstruktioner vil de anførte Definitioner medføre, at kun faa af de Snitkræfter og Spændinger, man hidtil har set bort fra, kan kaldes sekundære. Men det er ogsaa et stort Spørgsmaal, om det er berettiget at se bort fra de øvrige Snitkræfter og Spændinger, som man hidtil har gjort.

---

### *Summary.*

With the exception of the classical case of secondary stresses in steel trusses, due to rigid connections of the joints, no exhaustive definition of the term secondary stresses has so far been presented. More or less tacitly, however, secondary stresses have been defined as it were as stresses which could be neglected without appreciably impairing the safety against failure. It is shown that this definition is inadequate. For reinforced concrete structures not even examples suggesting a definition of secondary stresses have been proposed.

The author presents influence lines, determined by means of Beggs' apparatus, for the stresses, i.e. sectional forces, in the members of a celluloid model as well as for the secondary moments at the joints, due to the rigidity of the connections.

The common theory that, due to the plasticity of the material, the secondary stresses diminish and disappear when the stage of failure is approached cannot be generally accepted as the compressed members do not necessarily have to be highly stressed and, due to the fact that the condition of loading which causes failure of a certain member does not generally produce ultimate stress in the other members of the structure. It should be noted, however, that the deflection of a member due to compression will tend to relieve the secondary moments in other members at the joint.

Ved primære Snitkræfter (primære Spændinger, Grundspændingerne) forstaas de beregnede Snitkræfter som fremkommer, naar man ser bort fra de sekundære Snitkræfter.

Paa samme Maade som man — sidestillet med andre Snitkræfter fremkaldt af statisk Belastning — taler om dynamiske Paavirkninger og Ekstraspændinger (fra Temperaturvariationer, Svind og Eftergiveness af Understøtninger), kan man tale om sekundære dynamiske Virkninger og sekundære Ekstraspændinger.

For Jernbeton-Konstruktioner vil de anførte Definitioner medføre, at kun faa af de Snitkræfter og Spændinger, man hidtil har set bort fra, kan kaldes sekundære. Men det er ogsaa et stort Spørgsmaal, om det er berettiget at se bort fra de øvrige Snitkræfter og Spændinger, som man hidtil har gjort.

---

### *Summary.*

With the exception of the classical case of secondary stresses in steel trusses, due to rigid connections of the joints, no exhaustive definition of the term secondary stresses has so far been presented. More or less tacitly, however, secondary stresses have been defined as it were as stresses which could be neglected without appreciably impairing the safety against failure. It is shown that this definition is inadequate. For reinforced concrete structures not even examples suggesting a definition of secondary stresses have been proposed.

The author presents influence lines, determined by means of Beggs' apparatus, for the stresses, i.e. sectional forces, in the members of a celluloid model as well as for the secondary moments at the joints, due to the rigidity of the connections.

The common theory that, due to the plasticity of the material, the secondary stresses diminish and disappear when the stage of failure is approached cannot be generally accepted as the compressed members do not necessarily have to be highly stressed and, due to the fact that the condition of loading which causes failure of a certain member does not generally produce ultimate stress in the other members of the structure. It should be noted, however, that the deflection of a member due to compression will tend to relieve the secondary moments in other members at the joint.

It is shown by means of the influence lines produced by measurements, that due to the secondary moments, the sectional forces may be considerably greater than the forces computed for a system having hinged joints.

It is further shown that even for steel and concrete columns, i.e. members of a structure characterized by having the shortest stress-deformation curves, the plastic deformations are at least of the same magnitude as the elastic deformations at the stage of failure. Consequently it is permissible to neglect such stresses the removal of which does not require greater plastic deformations than the elastic ones at the failure stage. This can apply to stresses caused by statical indeterminateness only.

It is recommended to distinguish between secondary sectional forces and moments the determining of which being more or less feasible, as against f. inst. such local secondary stresses around rivet groups etc. which cannot be determined as redundant quantities.

The following definitions are proposed:

Secondary sectional forces and moments are forces and moments which, being due to statical indeterminateness, act on the normal section of a member and which can be neglected in the calculations without causing the thus resulting primary sectional forces to differ materially from the actual forces and without impairing appreciably the safety against failure.

Secondary stresses are stresses which do not in the proper sense influence the sectional forces and moments of the structure and which can be left out of the computations and proportioning without materially reducing the safety against failure.

Primary sectional forces (and moments) are the forces which result when the secondary sectional forces (and moments) are disregarded.

---